PROGRAMACIÓN ESTOCÁSTICA MULTIOBJETIVO CON AVERSIÓN AL RIESGO

LEÓN, JAVIER; PUERTO, JUSTO; **VITORIANO, BEGOÑA**

www.mat.ucm.es/humlog

Depto. Estadística e Investigación Operativa, Instituto de Matemática Interdisciplinar

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Programación Estocástica Multiobjetivo

- *Programación estocástica multiobjetivo*: muy apropiada para problemas en muchos ámbitos (energía, finanzas, emergencias…):
  - Incertidumbre
  - Criterios múltiples
- Sea $$min_{x \in X} \left(f_1(x,\omega), \dots, f_K(x,\omega)\right) \text{ con } \omega \in \Omega$$

donde la distribución de ω se supone conocida.

- Es habitual considerar la distribución discreta (muchas veces como aproximación) denominándose *escenarios* a los posibles valores de la distribución: *programación estocástica.*

Aversión al riesgo en Programación Estocástica: CVaR

- Aversión al riesgo en *programación estocástica*:
  - Reducir el problema a un problema determinista con una característica de la distribución (habitual la media)
  - La media no es apropiada para aversión al riesgo (minimizar valores extremos)
  - ***CVaR (Valor en riesgo condicional):*** Dada una función de distribución de una variable aleatoria X, $F_X(\omega)$, y $\beta \in \{0,1\}$ el β-$CVaR$ es el valor esperado condicionado en la región $\{\omega: F_X(\omega) \geq \beta\}$.
  - Sea una variable aleatoria discreta que toma valores $\omega_1, \dots \omega_J$ con probabilidades $\pi_1, \dots, \pi_J$, respectivamente, el β-$CVaR$ se calcularía como:

$$\beta\text{-}CVaR(\omega_1, \dots, \omega_J) = \frac{\pi_{(1)}}{\beta}\omega_{(1)} + \frac{\pi_{(2)}}{\beta}\omega_{(2)} + \dots + (1 - \frac{\pi_{(1)} + \pi_{(2)} + \dots + \pi_{(j^*-1)}}{\beta})\omega_{(j^*)}$$

- $(\omega_{(1)}, \dots, \omega_{(J)})$ vector ordenado de mayor a menor de $(\omega_1, \dots, \omega_J)$, y
- j^* tal que $\sum_{\{j<j^*\}} \pi_j < \beta$ y $\sum_{\{j\leq j^*\}} \pi_j \geq \beta$.

Aversión al riesgo en Programación Multiobjetivo: OWA con importancias

- ***Operador de agregación OWA***:

Dados $a_1, .., a_K \in \Re$, el operador OWA de pesos $\lambda_1, \dots, \lambda_K$, tales que $\lambda_i \in \{0,1\}$ y $\sum_i \lambda_i = 1$, se define como

$$OWA(a_1, \dots, a_K) = \sum_i \lambda_i a_{(i)}$$

donde $\left(a_{(1)}, \dots, a_{(K)}\right)$ es el vector ordenado de mayor a menor de $(a_1, \dots, a_K)$.

  - Nota: $\lambda_i = \frac{1}{K}$ sería la media, $\lambda_1 = 1$ sería el máximo, $\lambda_K = 1$ sería el mínimo…

- ***OWA con importancias: aplicación a promedio de peores casos con importancia total r***

  - Dados $a_1, .., a_K \in \Re$, con importancias $w_1, .., w_K \in \Re$, tal que $\sum_i w_i = 1$, extension del operador OWA para la media de los peores casos, ponderados por su importancia, cuya suma de importancias sea igual a *r*:

$$r\text{-}OWA(a_1, \dots, a_K) = \frac{w_{(1)}}{r} a_{(1)} + \frac{w_{(2)}}{r} a_{(2)} + \dots + \left(1 - \frac{w_{(1)} + w_{(2)} + \dots + w_{(j^*-1)}}{r}\right) a_{(j^*)}$$

siendo j^* tal que $\sum_{\{j<j^*\}} w_j < r$ y $\sum_{\{j\le j^*\}} w_j \ge r$.

Aversión al riesgo en Programación Multiobjetivo Estocástica: OWA con importancias aplicado a CVaR de los criterios

- Sean $f_k^j(x)$ funciones a ser minimizadas en un conjunto factible X, con $k = 1, \ldots, K$ representando objetivos con sus importancias u_k, y $j = 1, \ldots, J$ escenarios con probabilidades π_j.
- Concepto de solución: ***r*-OWA de los β-CVaR de los criterios**.

$$h_r^{\beta}(x) = r\text{-}OWA(g_1^{\beta}(x), \ldots, g_K^{\beta}(x))$$

$$\text{donde} \quad g_k^{\beta}(x) = \beta\text{-}CVaR(f_k^{\omega_1}(x), \ldots, f_k^{\omega_J}(x))$$

- ***Procedimiento:***
  - ***Paso 0:*** Normalizar las funciones objetivo $f_k^j(x)$
  - ***Paso 1*:** Determinar valores para ***r*** y **β**
  - ***Paso 2:*** Para cada $x \in X$ y cada criterio definir $g_k^{\beta}(x)$ como la media del criterio *k* en los peores escenarios cuyas probabilidades suman **β**
  - ***Paso 3:*** Para cada $x \in X$, definir $h_r^{\beta}(x)$ como la suma ponderada de los peores valores $g_k^{\beta}(x)$ cuyas importancias suman ***r***

Ejemplo

- Sea un problema con 4 alternativas, 5 escenarios y 6 criterios.
  - Valores de Alternativa 1:

			Criteria					
			$w_1 = 0.20$	$w_2 = 0.10$	$w_3 = 0.20$	$w_4 = 0.25$	$w_5 = 0.15$	$w_6 = 0.10$
			k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6
scenarios	$\pi_1 = 0.15$	j_1	0.51	0.27	0.39	0.45	0.75	0.76
	$\pi_2 = 0.20$	j_2	0.58	0.65	0.47	0.26	0.90	0.24
	$\pi_3 = 0.30$	j_3	0.48	0.44	0.90	0.50	0.93	0.65
	$\pi_4 = 0.25$	j_4	0.76	0.18	0.01	0.90	0.56	0.02
	$\pi_5 = 0.10$	j_5	0.86	0.36	0.21	0.28	0.63	0.72
β-average, $\beta = 0.30$			0.793	0.580	0.900	0.833	0.930	0.728
r-OWA, $r = 0.17$			0.927					

$$0.793 = \frac{0.1 \times 0.86 + 0.2 \times 0.76}{0.3}$$

- …
- Para las 4 alternativas:

	β-Averages						r-OWA
	$g_1^\beta(x)$	$g_2^\beta(x)$	$g_3^\beta(x)$	$g_4^\beta(x)$	$g_5^\beta(x)$	$g_6^\beta(x)$	$h_r^\beta(x)$
Alternative 1	0.793	0.580	0.900	0.833	0.930	0.728	0.927
Alternative 2	0.930	0.832	0.703	0.820	0.660	0.770	0.930
Alternative 3	0.765	0.775	0.468	0.643	0.950	0.883	0.943
Alternative 4	0.993	0.760	0.473	0.773	0.820	0.990	0.993

$$0.927 = \frac{0.15 \times 0.93 + 0.02 \times 0.9}{0.17}$$

Cálculo en el caso continuo: programación matemática (I)

$$\min_{x \in X} h_r^{\beta}(x)$$

- Dados $k \in K$ y $x \in X$

$$f_k^{(1)}(x) \geq f_k^{(2)}(x) \geq \cdots \geq f_k^{(\hat{\jmath})}(x) \geq f_k^{(\hat{\jmath}+1)}(x) \geq \cdots \geq f_k^{(J)}(x)$$

$$1 = \underbrace{\underbrace{\pi_{(1)} + \pi_{(2)} + \cdots + \pi_{(\hat{\jmath}-1)}}_{<\beta} + \pi_{(\hat{\jmath})}}_{\geq \beta} + \cdots + \pi_{(J)}$$

$$g_k^{\beta}(x) = \frac{1}{\beta} \sum_j \hat{\pi}_j f_k^j(x) \quad \text{siendo} \quad \hat{\pi}_j = \begin{cases} \pi_j & j \in \{(1), \ldots, (\hat{\jmath}-1)\} \\ \beta - \sum_{j=(1)}^{j=(\hat{\jmath}-1)} \pi_j & j = \hat{\jmath} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- Puede calcularse como:

$$\begin{aligned} \max_{\tilde{u}_j} \quad & \frac{1}{\beta} \sum_{j=1}^{J} \tilde{u}_j \times f_k^j(x) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{J} \tilde{u}_j = \beta \\ & 0 \leq \tilde{u}_j \leq \pi_j \qquad j = 1, \ldots, J \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \max_{u_j} \quad & \sum_{j=1}^{J} u_j \times f_k^j(x) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{J} u_j = 1 \\ & 0 \leq u_j \leq \frac{\pi_j}{\beta} \qquad j = 1, \ldots, J \end{aligned}$$

Dual

$$\begin{aligned} \min_{z, y_j} \quad & z + \sum_{j=1}^{J} \frac{\pi_j}{\beta} y_j \\ \text{s.t.} \quad & z + y_j \geq f_k^j(x) \qquad j = 1, \ldots, J \\ & z \text{ free}, y_j \geq 0 \end{aligned}$$

Cálculo en el caso continuo: programación matemática (II)

- Así

$$g_k^\beta(x) \equiv \min_{z_k, y_{kj}} z_k + \sum_{j=1}^{J} \frac{\pi_j}{\beta} y_{kj}$$
$$\text{s.t. } z_k + y_{kj} \geq f_k^j(x) \quad j = 1, \dots, J$$
$$z_k \text{ free}, y_{kj} \geq 0 \quad j = 1, \dots, J$$

y

$$\min_{x \in X} g_k^\beta(x) = \min_{z, y_j, x} \quad z + \sum_{j=1}^{J} \frac{\pi_j}{\beta} y_j$$
$$\text{s.t.} \quad z + y_j \geq f_k^j(x) \quad j = 1, \dots, J$$
$$z \text{ free}, y_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, J$$
$$x \in X$$

- $h_r^\beta(x) = \frac{1}{r}\sum_k \widehat{w}_k g_k^\beta(x)$ puede calcularse como

$$\max_{t_k} \quad \sum_k t_k \times g_k^\beta(x)$$
$$\sum_k t_k = 1$$
$$0 \leq t_k \leq \frac{w_k}{r} \quad k = 1, \dots, K$$

Dual

$$\min_{z, v_k} \quad z + \sum_k \frac{w_k}{r} v_k$$
$$\text{s.t.} \quad z + v_k \geq g_k^\beta(x) \quad k = 1, \dots, K$$
$$z \text{ free}, v_k \geq 0 \quad k = 1, \dots, K$$

$\rightarrow$

$$\min_{z, v_k} \quad z + \sum_k \frac{w_k}{r} v_k$$
$$\text{s.t.} \quad z + v_k \geq \min_{z_k, y_{kj}} \quad z_k + \sum_{j=1}^{J} \frac{\pi_j}{\beta} y_{kj} \quad \forall k$$
$$\text{s.t.} \quad z_k + y_{kj} \geq f_k^j(x) \quad \forall j$$
$$z_k \text{ free}, y_{kj} \geq 0 \quad \forall j$$
$$z \text{ free}, v_k \geq 0 \quad \forall k$$

Cálculo en el caso continuo: programación matemática (III)

- $$\begin{aligned} \min_{z,v_k} \quad & z + \sum_k \frac{w_k}{r} v_k \\ \text{s.t.} \quad & z + v_k \ge \min_{z_k, y_{kj}} \quad z_k + \sum_{j=1}^{J} \frac{\pi_j}{\beta} y_{kj} & \forall k \\ & \qquad\qquad\quad \text{s.t.} \quad z_k + y_{kj} \ge f_k^j(x) \quad \forall j \\ & \qquad\qquad\qquad\quad\;\; z_k \text{ free}, y_{kj} \ge 0 \quad \forall j \\ & z \text{ free}, v_k \ge 0 & \forall k \end{aligned}$$

  equivale a

  $$\begin{aligned} \min_{z,v_k,z_k,y_{kj}} \quad & z + \sum_k \frac{w_k}{r} v_k \\ \text{s.t.} \quad & z + v_k \ge z_k + \sum_{j=1}^{J} \frac{\pi_j}{\beta} y_{kj} & \forall k \\ & z_k + y_{kj} \ge f_k^j(x) & \forall k, j \\ & y_{kj} \ge 0 & \forall k, j \\ & z_k \text{ free}, v_k \ge 0 & \forall k \\ & z \text{ free} \end{aligned}$$

- Y $\min_{x \in X} h_r^\beta(x)$ equivale a

  $$\boxed{\begin{aligned} \min_{z,v_k,z_k,y_{kj},x} \quad & z + \sum_k \frac{w_k}{r} v_k \\ \text{s.t.} \quad & z + v_k \ge z_k + \sum_{j=1}^{J} \frac{\pi_j}{\beta} y_{kj} & \forall k \\ & z_k + y_{kj} \ge f_k^j(x) & \forall k, j \\ & y_{kj} \ge 0 & \forall k, j \\ & z_k \text{ free}, v_k \ge 0 & \forall k \\ & z \text{ free} \\ & x \in X \end{aligned}}$$

Aplicación a un problema de ejemplo: problema de la mochila estocástico multivariante

- Problema de la mochila sentido minimización

$$
\begin{aligned}
\min_{x_i} \quad & \left\{ f_k^j(\mathbf{x}) := \sum_i (1 - x_i)\, b_{kj}^i \qquad \forall k, j \right\} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_i v_i x_i \le V && \forall i \\
& x_i \in \{0, 1\} && \forall i
\end{aligned}
$$

- Sin aversión al riesgo

$$
\begin{aligned}
\min_{x_i} \quad & \sum_{k,j} w_k \pi_j \sum_i (1 - x_i)\, b_{kj}^i \\
\text{s.t.} \quad & \sum_i v_i x_i \le V && \forall i \\
& x_i \in \{0, 1\} && \forall i
\end{aligned}
$$

Con aversión al riesgo

$$
\begin{aligned}
\min_{z, v_k, z_k, y_{kj}, x_i} \quad & z + \sum_k \frac{w_k}{r} v_k \\
\text{s.t.} \quad & z + v_k \ge z_k + \sum_{j=1}^{J} \frac{\pi_j}{\beta} y_{kj} && \forall k \\
& z_k + y_{kj} \ge \sum_i (1 - x_i)\, b_{kj}^i && \forall k, j \\
& \sum_i v_i x_i \le V && \forall i \\
& y_{kj} \ge 0 && \forall k, j \\
& x_i \in \{0, 1\} && \forall i \\
& z_k \text{ free}, v_k \ge 0 && \forall k \\
& z \text{ free}
\end{aligned}
$$

Aplicación a un problema de ejemplo: Resultados computacionales

- 243 casos generados aleatoriamente (volumen y beneficio). Equiprobables y utilidades iguales
- Medidas de comparación

$$\Delta_{\text{avg}} := 100 \frac{f_{\text{MIP}}\left(x^*_{\text{MSP}}\right) - z^*_{\text{MIP}}}{z^*_{\text{MIP}}}$$

$$\Delta_{\text{tail}} := 100 \frac{f_{\text{MSP}}\left(x^*_{\text{MIP}}\right) - z^*_{\text{MSP}}}{f_{\text{MSP}}\left(x^*_{\text{MIP}}\right)}$$

r	β	MSP Δ_{avg}					MIP Δ_{tail}				
		Min	**Mean**	**Median**	**Max**	**Std**	**Min**	**Mean**	**Median**	**Max**	**Std**
0.33	0.05	0.03	1.94	1.87	5.68	1.42	0.28	4.37	4.21	9.18	2.43
	0.10	0.02	1.70	1.61	5.68	1.44	0.18	3.54	2.85	9.18	2.42
	0.50	0.00	0.93	0.52	4.46	1.08	0.00	1.57	0.92	4.99	1.46
0.50	0.05	0.03	1.87	1.90	4.30	1.30	0.29	3.58	3.30	6.73	1.89
	0.10	0.02	1.65	1.14	4.30	1.37	0.13	2.87	2.47	6.59	1.86
	0.50	0.00	0.72	0.54	3.51	0.75	0.00	1.07	0.79	3.79	1.01
0.67	0.05	0.03	1.64	1.17	3.93	1.24	0.32	3.04	3.06	6.15	1.62
	0.10	0.01	1.50	1.10	3.93	1.31	0.12	2.43	2.02	5.84	1.58
	0.50	0.00	0.60	0.50	3.16	0.66	0.00	0.80	0.59	3.64	0.81

Aplicación a un problema de ejemplo: Resultados computacionales

- Primer caso: 50 objetos, 5 escenarios y 3 criterios. Equiprobables y utilidades iguales
- Medidas de comparación

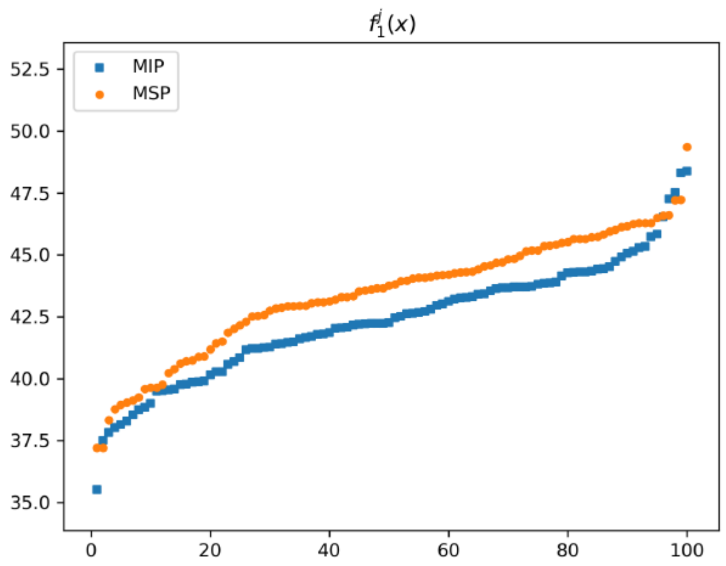
$$\Delta_{\text{avg}} := 100 \frac{f_{\text{MIP}}\left(x^*_{\text{MSP}}\right) - z^*_{\text{MIP}}}{z^*_{\text{MIP}}}$$

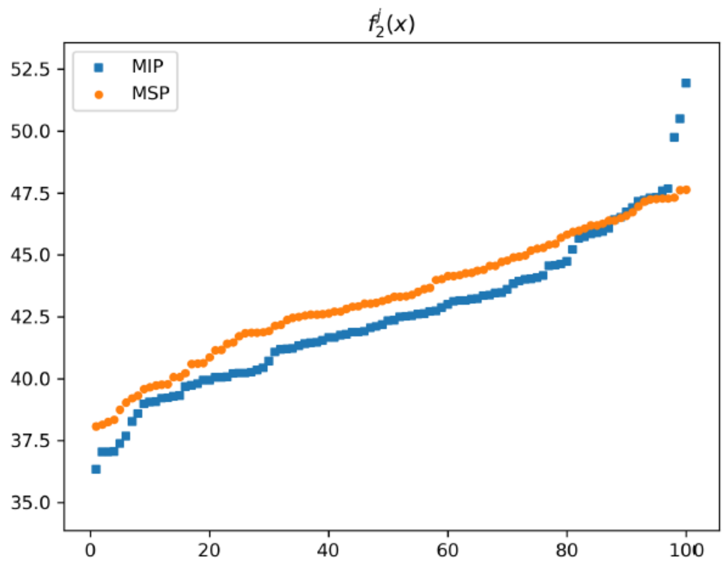
$$\Delta_{\text{tail}} := 100 \frac{f_{\text{MSP}}\left(x^*_{\text{MIP}}\right) - z^*_{\text{MSP}}}{f_{\text{MSP}}\left(x^*_{\text{MIP}}\right)}$$

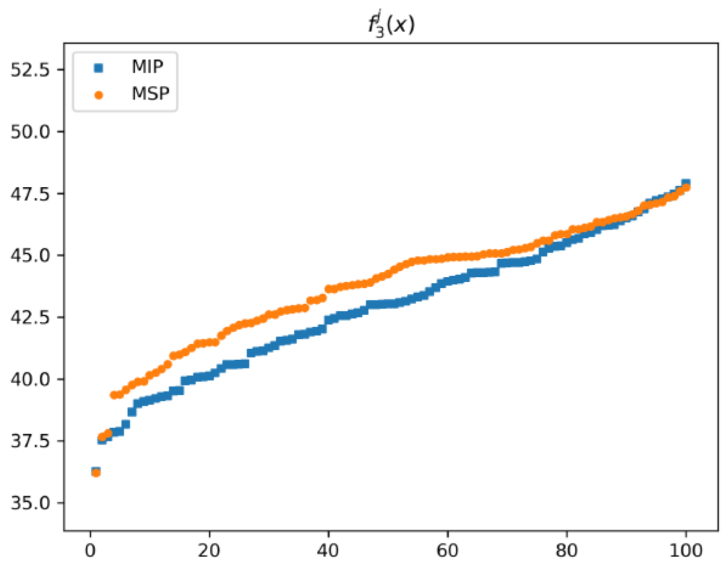
(a) MSP Solution				**(b) MIP Solution**			
	k_1	k_2	k_3		k_1	k_2	k_3
j_1	11.97	11.26	11.00	j_1	9.65	10.75	9.71
j_2	11.96	9.92	13.71	j_2	11.19	10.17	14.90
j_3	13.48	13.51	10.92	j_3	14.05	13.55	9.40
j_4	13.62	13.13	13.71	j_4	14.12	13.00	13.35
j_5	12.94	11.35	13.47	j_5	13.64	10.33	11.42

Aplicación a un problema de ejemplo: Resultados computacionales (II)

- Caso: 200 objetos, 100 escenarios (eje X menor a mayor), 3 criterios. Parámetros: $r = 0.33$, $\beta = 0.05$







Aplicación a un problema de ejemplo: Resultados computacionales (III)

- 100 Casos: 100 objetos, 25 escenarios y 6 criterios. r = 0.5, β=0.1

				MSP	MIP
	t_{MSP}	t_{MIP}	Δ_{time}	Δ_{avg}	Δ_{tail}
mean	16.98	0.20	91.31	2.03	3.09
std	46.57	0.03	254.68	1.12	1.49
min	0.53	0.14	2.81	0.16	0.86
25%	1.37	0.17	6.73	1.18	2.09
50%	3.74	0.19	19.72	1.93	2.81
75%	15.50	0.21	86.19	2.52	3.51
max	404.70	0.34	2175.82	5.67	8.57

Conclusiones

- Un nuevo concepto de solución para problemas de Decisión Multicriterio Estocástica con aversión al riesgo
- Un procedimiento de cálculo mediante programación lineal (salvo definición del conjunto de soluciones)
- Aplicación a un problema ejemplo: problema de la mochila
- Resultados:
  - La solución neutral al riesgo (media) es bastante peor en los escenarios extremos y criterios con peor logro, empeorando bastante más que la solución propuesta empeora la media (%)
  - Es más clara la diferencia en los casos extremos cuanto menores son r y β (mayor aversión al riesgo)
  - El tiempo de ejecución aumenta claramente, aunque admitiendo un 1% de GAP se reduce drásticamente
- La aplicación de este modelo debe hacerse cuando quede claro que existe aversión al riesgo tanto frente a la aleatoriedad como a un bajo logro de algunos criterios