# Juegos Cooperativos como herramienta para problemas de reparto de costes en ambiente de incertidumbre: información parcial sobre la ocurrencia de los escenarios

Borrero, D.V.[1], Hinojosa, M.A.[1], Mármol, A.M.[2]
[1] Universidad Pablo de Olavide, [2] Universidad de Sevilla.

## 1. Juego cooperativo multiescenario

PROBLEMA: Repercusión del coste total de un servicio de reparto o recogida (recogida de basura, lanzadera al aeropuerto, reparto de comercios, servicio a domicilio, etc.) cuando hay varias posibilidades con el mismo coste para realizar el servicio (diferentes **escenarios**) y no se sabe cual será el escenario que finalmente ocurrirá.

**Juego de reparto de costes en ambiente multiescenario,** $(N, \mathbf{c}, E)$:
- $N = \{1, \ldots, n\}$ conjunto de jugadores
- $E$ coste total a repartir entre los jugadores
- $\mathbf{c}$ función característica:
  - a cada $S \subset N$, asocia un vector $\mathbf{c}(S) \in \mathbb{R}^m_+$
  - $c_j(\emptyset) = 0$ y $c_j(N) = E, \ \forall \ j = 1, \ldots, m$

Las componentes de $\mathbf{c}(S) \in \mathbb{R}^m$ representan el coste que la coliación $S$ puede obtener por sí misma en cada uno de los $m$ escenarios.

REPARTO: $x \in \mathbb{R}^n$ con $x_i \geq 0, \ \forall i \in N$, que verifica $\sum_{i \in N} x_i = E$

Conjunto de repartos del juego: $I^*(N, \mathbf{c}, E)$

NOTACIÓN: $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$

## 2. Núcleo: Conjunto de repartos estables

- **Las probabilidades de ocurrencia de los escenarios son conocidas** ($\lambda \in \mathbb{R}^m$):

**El juego ponderado escalar** es $(N, c^\lambda)$ con $c^\lambda(S) = \lambda^t \mathbf{c}(S) = \sum_{j=1}^m \lambda_j c_j(S)$

**Núcleo del juego escalar:** $C(N, c^\lambda) = \{x \in I^*(N, c^\lambda) \mid x(S) \leq c^\lambda(S), \forall S \subset N\}$

- **Hay información incompleta sobre las probabilidades de ocurrencia de los escenarios mediante un sistema de desigualdades lineales que definen el subconjunto poliédrico** $\Lambda \subseteq \Delta^{m-1} = \{\lambda \in \mathbb{R}^m \mid \lambda_j \geq 0, \sum_{j=1}^m \lambda_j = 1\}$

Ejemplo: $\Lambda = \{\lambda \in \Delta^{m-1} \mid \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_m \geq 0\}$.

Dado un juego $(N, \mathbf{c}, E)$ y un poliedro de información $\Lambda \subseteq \Delta^{m-1}$:

**Núcleos con información parcial:**

### Núcleo de Preferencia

$$PC_\Lambda(N, \mathbf{c}, E) = \{x \in I^*(N, \mathbf{c}, E) \mid x(S) \leq c^\lambda(S), \forall \lambda \in \Lambda, \forall S \subset N\}$$

### Núcleo Común

$$CC_\Lambda(N, \mathbf{c}, E) = \{x \in I^*(N, \mathbf{c}, E) \mid \exists \lambda \in \Lambda, \ x(S) \leq c^\lambda(S), \ \forall S \subset N\}$$

### Núcleo de Dominancia

$$DC_\Lambda(N, \mathbf{c}, E) = \{x \in I^*(N, \mathbf{c}, E) \mid \text{for each } S \subset N, \exists \lambda \in \Lambda, x(S) \leq c^\lambda(S)\}$$

## 3. Resultados

$$PC(N, \mathbf{c}, E) = \bigcap_{\lambda \in \Delta^{m-1}} C(N, c^\lambda) \qquad CC(N, \mathbf{c}, E) = \bigcup_{\lambda \in \Delta^{m-1}} C(N, c^\lambda)$$

Dados dos poliedros de información parcial $\Lambda, \Lambda' \subseteq \Delta^{m-1}$, tales que $\Lambda \subset \Lambda'$,

$$\begin{array}{ccccc} PC_\Lambda(N, \mathbf{c}, E) & \subseteq & CC_\Lambda(N, \mathbf{c}, E) & \subseteq & DC_\Lambda(N, \mathbf{c}, E) \\ \cup\!| & & \cap\!| & & \cap\!| \\ PC_{\Lambda'}(N, \mathbf{c}, E) & \subseteq & CC_{\Lambda'}(N, \mathbf{c}, E) & \subseteq & DC_{\Lambda'}(N, \mathbf{c}, E) \end{array}$$

Las inclusiones pueden ser estrictas.

## 4. Obtención de los repartos estables

Dado un juego $(N, \mathbf{c}, E)$ e información parcial $\Lambda \subseteq \Delta^{m-1}$, el **juego transformado** es $(N, c^\Lambda, E)$, tal que

$$c^\Lambda(S) = M_\Lambda^t \mathbf{c}(S) \in \mathbb{R}^r, \ \text{ para cada } \ S \subseteq N,$$

con $M_\Lambda \in \mathbb{R}^{m \times r}$ la matriz cuyas columnas son los $r$ puntos extremos de $\Lambda$.

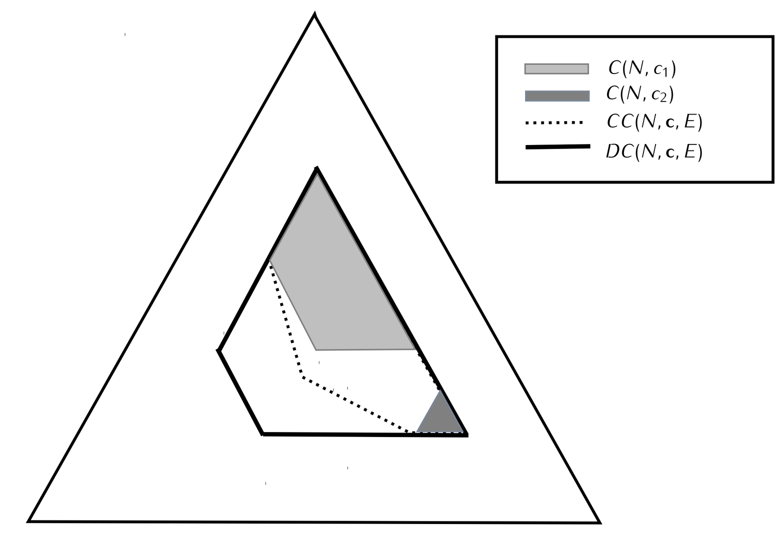
$$PC_\Lambda(N, \mathbf{c}, E) = PC(N, c^\Lambda, E) \qquad CC_\Lambda(N, \mathbf{c}, E) = CC(N, c^\Lambda, E)$$
$$DC_\Lambda(N, \mathbf{c}, E) = DC(N, c^\Lambda, E)$$

EJEMPLO:

### $\Lambda \subseteq \Delta^{m-1}$

Juego con 2 escenarios

| $S$ | $\{1\}$ | $\{2\}$ | $\{3\}$ | $\{1,2\}$ | $\{1,3\}$ | $\{2,3\}$ | $N = \{1,2,3\}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_1(S)$ | 1 | 2 | 1.5 | 2.5 | 2 | 2.5 | 3 |
| $c_2(S)$ | 1.5 | 0.75 | 2 | 1.25 | 2.5 | 2.5 | 3 |



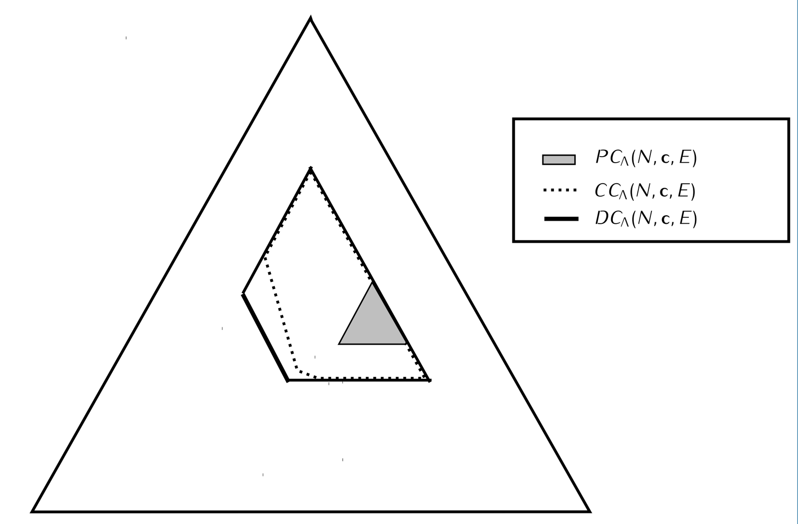

$PC(N, \mathbf{c}, E)$ es vacío.

### $\Lambda = \{\lambda \in \Delta^1 \mid \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0\}$

Puntos extremos: $\{(1,0), (1/2, 1/2)\}$

2-juego transformado

| $S$ | $\{1\}$ | $\{2\}$ | $\{3\}$ | $\{1,2\}$ | $\{1,3\}$ | $\{2,3\}$ | $N = \{1,2,3\}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_1(S)$ | 1 | 2 | 1.5 | 2.5 | 2 | 2.5 | 3 |
| $c_2(S)$ | 1.25 | 1.375 | 1.75 | 1.875 | 2.25 | 2.5 | 3 |




## 5. Referencias

- Borrero, D.V., Hinojosa, M.A., Mármol, A.M. (2016). Stable solutions for multiple scenario cost allocation games with partial information. *Annals of Operations Research*, 245, 209–226.
- Hinojosa, M.A., Mármol, A.M. and Thomas, L.C. (2005). Core, least core and nucleolus for multiple scenario cooperative games. *European Journal of Operational Research*, 164, 225–238.
- Mármol, A.M., Puerto, J., Fernández, J.R. (2002). Sequential incorporation of imprecise information in multiple criteria decision processes. *European Journal of Operational Research*, 137, 123–133.