

Optimización Multiobjetivo para la Selección de Carteras: Aplicación de un Algoritmo Evolutivo Basado en Punto de Referencia

Ana B. Ruiz^a, Enriqueta Vercher^b, Mariano Luque^a,
Rubén Saborido^c, José Bermúdez^b.

^aUniversidad de Málaga; ^bUniversidad de Valencia;
^cÉcole Polytechnique de Montréal

Abstract: En este trabajo, abordamos el problema de selección de carteras de inversión desde una perspectiva multiobjetivo y consideramos algoritmos evolutivos de optimización multiobjetivo basados en preferencias para generar carteras eficientes teniendo en cuenta preferencias del inversor. Por un lado, proponemos un modelo de optimización para la selección de carteras con tres objetivos, en el que se han considerado números fuzzy de tipo LR para modelizar la incertidumbre de los futuros beneficios. Las funciones objetivo a optimizar son el beneficio esperado (a maximizar) y dos medidas del riesgo de la inversión (ambas a minimizar): la semi-desviación media absoluta por debajo del beneficio esperado y el valor de riesgo (medida de la peor pérdida esperada en un horizonte dado). Además de la restricción presupuestaria, se ha introducido una restricción que limita la cardinalidad de las carteras y cotas superiores e inferiores para la inversión en cada activo. El problema de optimización multiobjetivo resultante, denominado por sus siglas en inglés como modelo MASdVaR (mean-absolute semideviation value-at-risk model), es no lineal y no convexo y, por ello, se ha aplicado el algoritmo evolutivo basado en preferencias WASF-GA para generar carteras de inversión eficientes. En WASF-GA, se consideran valores de aspiración que el decisor desea alcanzar en cada objetivo para expresar las preferencias. Para el modelo MASdVaR, los valores de aspiración considerados corresponden a un perfil de inversor conservador. Los resultados obtenidos para un caso basado en el mercado de inversión español demuestran que las carteras eficientes obtenidas que alcanzan los mayores beneficios, mejoran los valores de referencia considerados para las dos medidas del riesgo. Por otro lado, aquellas carteras con beneficios más moderados presentan valores de riesgo menores, pero sin dejar de satisfacer las aspiraciones del inversor, por lo que representan estrategias de inversión menos arriesgadas.

Palabras Clave: Selección de carteras de inversión; Algoritmos evolutivos de optimización multiobjetivo basados en preferencias; Solución Pareto óptima; Distribución de credibilidad; Variables fuzzy tipo LR.

Optimización Multiobjetivo para la Selección de Carteras: Aplicación de un Algoritmo Evolutivo Basado en Punto de Referencia

Ana B. Ruiz^a, Enriqueta Vercher^b, Mariano Luque^a, Rubén Saborido^c y José D. Bermúdez^b

^aUniversidad de Málaga, ^bUniversidad de Valencia, ^cÉcole Polytechnique de Montréal (Canadá)

Problema de Optimización asociado a la Selección de Carteras de Inversión

- ▶ Una **cartera** es un conjunto de inversiones en un mercado de valores en el que cotizan N activos, cuyo rendimiento futuro es incierto.
- ▶ **Modelo clásico:**
 - ▶ Maximizar el **rendimiento esperado** (media).
 - ▶ Minimizar el **riesgo de la inversión** (desviación típica).
 - ▶ Estimaciones a partir de los **valores históricos de los activos** que componen la cartera.
- ▶ **Modelos más realistas:**
 - ▶ **Otros criterios asociados al riesgo:** semi-varianza, semi-desviación absoluta, asimetría, el valor de riesgo...
 - ▶ **Restricciones adicionales:** diversificación del capital, restricciones de cardinalidad, consideración de las preferencias del inversor...
 - ▶ **Dificultad:** gestión efectiva de las restricciones para generar carteras factibles.
- ▶ **Nuestra propuesta:**
 - ✓ **Nuevo modelo** de optimización multiobjetivo para la selección de carteras: **modelo MASdVaR**.
 - **Objetivos:** **beneficio esperado** (a maximizar) y dos medidas del riesgo (a minimizar), la **semi-desviación media absoluta por debajo del beneficio esperado** y el **valor de riesgo**.
 - **Restricciones:** **restricción presupuestaria**, **restricción de cardinalidad de las carteras** y **restricción de diversificación** (cotas superiores e inferiores para cada activo).
 - **Incertidumbre del rendimiento de la inversión:** se aproxima mediante **variables fuzzy** para una cartera dada.
 - ✓ Introducción de **preferencias del inversor** en el proceso de resolución para la obtención de carteras eficientes que se ajusten a dichas preferencias.
 - ✓ **Metaheurísticas** para la obtención de carteras eficientes: **algoritmo evolutivo basado en preferencias WASF-GA** [1].

Modelo MASdVaR

Dados N activos, una **cartera** \mathbf{x} define cuánto debe ser invertido en cada activo i del total de la inversión:

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)^T,$$

donde x_i representa la **proporción del capital** invertido en el activo i ($i = 1, \dots, N$).

Incertidumbre del Riesgo

- ▶ Dada una cartera \mathbf{x} , se calculan los rendimientos históricos, $r_t(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N r_{it}x_i$, siendo r_{it} el rendimiento del activo i -ésimo en el periodo t .
- ▶ El rendimiento de \mathbf{x} se aproxima mediante una **variable fuzzy de tipo LR**, $\xi_{\mathbf{x}} = (A, B, c, d)_{L_{\alpha}R_{\beta}}$, cuyos parámetros se definen a partir de $r_t(\mathbf{x})$:
 - $[A, B]$ es el núcleo.
 - c y d son las amplitudes derecha e izquierda.
 - α y β son los parámetros positivos de forma de las funciones de referencia $L_{\alpha}(t) = 1 - t^{\alpha}$ y $R_{\beta}(t) = 1 - t^{\beta}$.

Restricciones

- ✓ **Restricción presupuestaria** para invertir todo el capital:

$$\sum_{i=1}^N x_i = 1$$

- ✓ **Restricción de cardinalidad** para limitar el número de activos en los que se invierte:

$$h_l \leq C(\mathbf{x}) \leq h_u,$$

donde $C(\mathbf{x})$ es el número de activos positivos ($x_i > 0$). Asumimos que $h_l = h_u = h$, esto es, $C(\mathbf{x}) = h$.

- ✓ Garantizar la **diversificación de la inversión:**

$$l_i \leq x_i \leq u_i \text{ para todo } i = 1, \dots, N,$$

siendo l_i y u_i cotas inferiores y superiores para cada activo i ($\forall i = 1, \dots, N$).

Funciones Objetivo

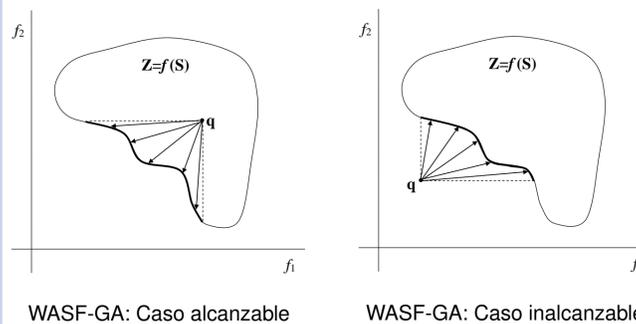
- ✓ $E(\xi_{\mathbf{x}})$: beneficio esperado credibilístico de la inversión.
- ✓ $MASd(\xi_{\mathbf{x}})$: semi-desviación media absoluta por debajo del beneficio esperado.
- ✓ $FVaR_{5\%}(\xi_{\mathbf{x}})$: Valor fuzzy de riesgo al 5% (medida de la peor pérdida esperada en un horizonte dado).

El modelo de optimización multiobjetivo MASdVaR es mixto entero, no lineal, no convexo y NP-duro.

Algoritmo WASF-GA

Descripción

- ▶ **Algoritmo evolutivo de optimización multiobjetivo basado en preferencias** propuesto en [1].
- ▶ **Preferencias del decisor:** un punto de referencia $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_k)^T$, donde q_i es un valor que el decisor desea alcanzar para el objetivo i ($\forall i = 1, \dots, k$).
- ▶ **Objetivo de WASF-GA:** aproximar la **región de interés** del frente óptimo de Pareto definida por \mathbf{q} .
- ▶ En cada generación, se seleccionan los individuos que minimizan la función de logro de Wierzbicki para el punto de referencia \mathbf{q} dado por el decisor, considerando un conjunto de vectores de pesos, W .
- ▶ En la práctica, se aproxima la región de interés del frente óptimo de Pareto mediante la **proyección de \mathbf{q}** considerando un conjunto de direcciones de proyección uniformemente distribuidas (definidas por los vectores de pesos de W).



Operadores Genéticos

Operadores propuestos en [2] para generar **carteras factibles bajo las restricciones de cardinalidad y de diversificación:**

- Mutación:** operador unitario que, dado una cartera \mathbf{x} , intercambia las proporciones de dos activos entre sí.
- Recombinación:** operador binario diseñado para obtener dos carteras hijas a partir de dos carteras padres, de forma que verifiquen la restricción de cardinalidad (compuestas exactamente por h activos).
- Reparación:** asegura que las nuevas carteras generadas satisfacen la restricción presupuestaria y la restricción de diversificación.

Experimento Computacional

Caso de Estudio

- ▶ Utilizamos los rendimientos semanales de **33 activos** que cotizaban en el **IBEX35**, observados en $T = 165$ periodos (Enero 2013 - Marzo 2016).
- ▶ **Cardinalidad:** tamaño de la cartera $h = 9$ activos.
- ▶ **Diversificación:** cotas inferiores y superiores $l_i = 0$ y $u_i = 0,3, \forall i = 1, \dots, 33$.

Preferencias del Inversor

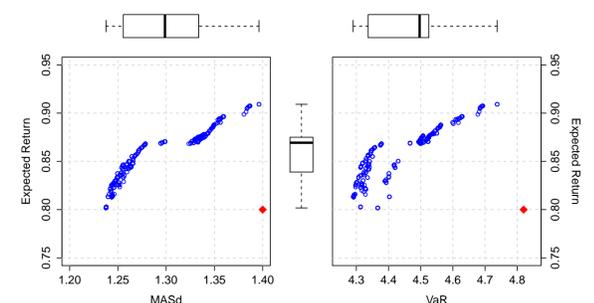
- Asumimos un **perfil conservador** para el inversor:
 - ✓ Valor deseable para el retorno de la inversión: 0.80.
 - ✓ Valores deseables para las dos medidas del riesgo MASd y VaR: 1.40 y 4.82, respectivamente.
- **Punto de referencia para ejecutar WASF-GA:**

$$\mathbf{q} = (0,80, 1,40, 4,82)^T$$

Resultados

- ✓ 30 ejecuciones independientes de WASF-GA.
- ✓ 369 carteras no dominadas obtenidas.

	Min.	Q ₁	Mediana	Media	Q ₃	Max.
Valor esp.	0.802	0.839	0.869	0.860	0.875	0.909
MASd	1.238	1.256	1.299	1.301	1.334	1.396
VaR	4.290	4.337	4.497	4.453	4.525	4.738



Conclusiones

- ✓ Las carteras generadas **mejoran los valores deseables para los tres objetivos** \Rightarrow el inversor obtiene carteras que mejoran sus expectativas.
- ✓ Aunque **WASF-GA** no ha sido propuesto ad-hoc para resolver el modelo MASdVaR, **ha sido capaz de generar carteras no dominadas**, que se ajustan a la información preferencial proporcionada.

Referencias

- [1] A.B. Ruiz, R. Saborido y M. Luque. *A preference-based evolutionary algorithm for multiobjective optimization: The weighting achievement scalarizing function genetic algorithm*, Journal of Global Optimization, 62 (1), p. 101-129, 2015.
- [2] R. Saborido, A.B. Ruiz, J.D. Bermudez, E. Vercher y M. Luque. *Evolutionary multiobjective optimization algorithms for fuzzy portfolio selection*, Applied Soft Computing, 39, p. 48-63, 2016.